PC : colle n$^{\text{o}}$ 16

Du 26 au 30 janvier

Thème : probabilités + séries entières (début)

Documents utiles : TD13 + TD14 + TD15 (exercices 2+6).

1 Questions de cours / Classiques

– (*TD 13, exo. 7*) L'énoncé vous est redonné, vous le résolvez en expliquant bien les étapes.

Pour les deux questions, on introduit, pour $i \in \mathbb{N}^*$, B_i : « obtenir une bleue au i-ème tirage ».
1. On justifie que $E = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ et on utilise la σ-additivité. Ensuite, on décompose $F_n = B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap \overline{B_n}$ et on utilise l'indépendance des lancers.
2. On justifie que $\overline{E} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n$ et que la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante afin d'utiliser la continuité décroissante. Ensuite, on décompose G_n en fonction des B_i afin d'avoir $P(G_n)$ puis $\lim P(G_n)$. Il ne reste qu'alors à passer à l'événement contraire pour obtenir $P(E)$.

– (*Thm. 25 + exe. 26*) Dérivation terme à terme (énoncé) + Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$.

Pour le théorème, on met bien en avant qu'il y a trois résultats : le caractère $\mathcal{C}^\infty$, le rayon de convergence des dérivées qui reste le même, et l'expression des dérivées.
Pour le calcul de la somme, on part de la série géométrique, on multiplie par x et on dérive.

– (*§4.2*) Les développements en série entière usuels :

$$\mathrm{e}^x,\ \cos(x),\ \sin(x),\ \mathrm{ch}(x),\ \mathrm{sh}(x),\ \frac{1}{1\pm x},\ \ln(1\pm x),\ \arctan(x),\ (1+x)^\alpha.$$

Certains se déduisent très rapidement d'autres : vous avez le droit de ne pas connaître les 11 par cœur à condition de retrouver chacun en moins de 30 secondes à partir d'un connu.
De plus, il faut les connaître « dans les deux sens » : fonction vers série et inversement.

2 Exercice imposé

Mettre en œuvre la formule des probabilités totales, par exemple pour lier des probabilités d'événements dépendants des étapes n et $n+1$ d'un certain processus.

$\rightsquigarrow$ *Savoir les exercices 13 (Q1) et 14 (Q1) du TD13.*

3 Exercices libres

– Probabilités :
  - ▷ Vérifier qu'une application est bien une probabilité sur un ensemble donné (via la somme qui vaut 1).
  - ♡ Traduire un énoncé en définissant les événements adéquats, décomposer un événement en fonction d'événements plus simples via des $\cap$ et $\cup$.
  - ▷ Utiliser les propriétés d'une probabilité (σ-additivité, croissance, événement contraire, continuité monotone, etc.).
  - ▷ Étudier l'indépendance de deux événements, utiliser l'indépendance d'une famille d'événements.
  - ▷ Utiliser la définition d'une probabilité conditionnelle, la formule des probabilités composées, la formule de Bayes.

– Séries entières :

- ♡ Déterminer le rayon de convergence d'une série entière (règle de d'Alembert des séries entières, utilisation de la règle de d'Alembert des séries numériques, critères de comparaison et d'équivalence, tests de valeurs, définition du rayon de convergence).
- ▷ Recherche du domaine de définition (étude de la convergence au bord de l'intervalle ouvert de convergence).
- ▷ Produit de Cauchy.
- ♡ Régularité de la somme d'une série entière : primitivation terme à terme, caractère $\mathcal{C}^\infty$, dérivation terme à terme.
- ▷ Premiers calculs de somme.